

# 数理生態学／感染症モデルの構築と数学的考察

～感染症の流行を数理モデルにより分析する～

兵庫県立神戸高等学校 総合理学科 2 学年  
上田・大脇・川村・出崎・丸山・諸澤・渡邊

神戸高校では昨年的一年間、新型インフルエンザにより多くの影響を受けた。そこで私達は、感染症の流行を数理モデルにより分析することにした。感染症を記述する微分方程式<SHIR モデル>を新たに立て、数値解の分析をした。また一方で<SHIR モデル>をシミュレーション化し、各エージェントの人数動向をステップ毎に捉えた。このモデルを用いて「パラメーターの設定」「パンデミック」「年齢層別ワクチン」「学級閉鎖・学年閉鎖」「マスクモデル」等について数学的に考察した。

## 1.はじめに

カーマック・マッケンドリックの「SIRモデル」を参考に、保菌者(H)と、免疫保持者(R)が感受性者(S)にもなるということを考慮し、今回の新型インフルエンザに対応する微分方程式<SHIRモデル>を新しく設定した。各パラメーター( $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $h$ )はシミュレーションのエージェントのルールに関連付ける。

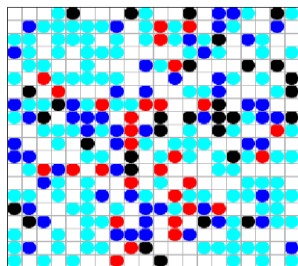
<SHIRモデル> **NEW**

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)H(t) + \alpha R(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \beta S(t)H(t) - hH(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = hH(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \alpha R(t) \end{cases}$$

(S: 感受性者, H: 保菌者, I: 発病者, R: 免疫保持者)

( $\alpha$ : 免疫喪失率,  $\beta$ : 感染率,  $\gamma$ : 回復率,  $h$ : 発病率)

## 2. <SHIRモデル>のシミュレーション化



【初期設定】広さ 20×20 (400 マス)、

総人数 240 人

(内訳/S: ● 230 人

H: ● 10 人 I: ● 0 人

R: ● 0 人)

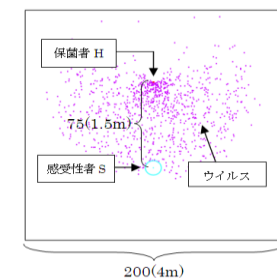
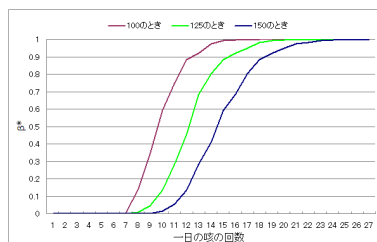
【パラメーター設定】 $\alpha = 1/10$  (ウイルスの変異期間 10 日間)

$\gamma = 1/5$  (発病期間 5 日間)、 $h = 1/3$  (潜伏期間 3 日間)

【推移感染率  $\beta^*$ 】推移感染率  $\beta^*$ : S と H

が一对一对面したときの感染率。

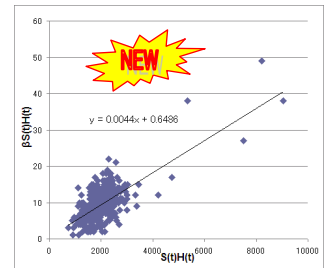
“人は一回の咳で約 10 万個のウイルスを放出し、1 万～1.5 万個を吸収すると発病する”ということからシミュレーションを用いて 500 回の試行で  $\beta^*$ を算出。



潜伏期間中の人の一日あたりの咳の回数は 5～15 (回) なので、グラフより  $\beta^* = 0.25$

【感染率  $\beta$  の検証】感染率  $\beta$ : 感受性者(S)の集団から保菌者(H)の集団に移る 1 日あたりの人数の割合。

<SHIRモデル>のシミュレーションを用いて、 $S(t) \cdot H(t)$ を横軸、 $\beta S(t) \cdot H(t)$ を縦軸にとった散布図を作成する。散布図における近似直線の傾きが  $\beta$  となり  $\beta = 0.0044$



## 3. シミュレーションの実験値と微分方程式の数値解値の比較

項別	理論値	実験値	誤差率(%)
	微分方程式の数値解	artisocシミュレーション	$\frac{ \text{理論値}-\text{実験値}  \times 100}{\text{理論値}}$
S	75.76	74.77	1.308
H	27.37	28.17	2.909
I	45.62	46.24	1.345
R	91.25	90.83	0.459

微分方程式の数値解を『理論値』、シミュレーションを「実験値」として比較すると誤差率は3%以下となった。

【考察】誤差率が3%以下であることから各パラメーターの設定と、<SHIRモデル>のシミュレーション化は妥当なものであると考えられる。

## 4. パンデミックの考察

発病率  $h = 0 \sim 1$  まで 0.05 区間毎に変化させて、発病者 I の最大値がどのように変化するか微分方程式の数値解を用いて調べる。ここでは、発病者の最大値が大きな値ほどパンデミックと定義する。

h(発病率)	Imax(発病者の最大値)
0	0
0.05	40
0.1	61
0.15	75
0.2	84
0.25	87
0.3	90
0.35	88
0.4	89
0.45	83
0.5	82
0.55	79
0.6	75
0.65	61
0.7	60
0.75	57
0.8	38
0.85	32
0.9	35
0.95	29
1	14

【結果】左表より  $h = 0.25 \sim 0.4$  つまり潜伏期間が 2.5～4 日間のときにパンデミック (発病者 I の最大値が大きな値) を引き起こしている。

【考察】新型インフルエンザの潜伏期間は 3 日間であり、パンデミックを起こしやすい潜伏期間 2.5～4 日間と重なっているため、新型インフルエンザウイルスはかなり危険なウイルスだと考えられる。

## 5.研究テーマ：『年齢別ワクチン効果の考察』

■<SHIRモデル>での240人を6つの年齢層にわけシミュレーションを作った。

そしてワクチンの優先接種順位を考慮し、一年間経過観察して、発病者(I)の人数動向を現実社会と比較する。また効率的なワクチン接種の方法を調べる。

<ルール>

- ・基本的な動きは<SHIRモデル>と同じ。
- ・パラメーター  $h=1/3$ 、 $\gamma=1/5$ 、 $\alpha=1/10$  は今までのシミュレーションと同様。
- ・日本の人口を①～⑥の年齢層に分け、各年齢層で(表1)のようにパラメーターをかえる。
- ・総務省の日本の人口のデータをもとに各年齢層の人数比を決める。
- ・ $\beta^*$ は「感染のしやすさ」というユトレヒト大学の西浦 博氏の論文をもとに比例配分して決める。
- ・感受性者は毎ステップ $\delta$ の確率でワクチンを接種し、ワクチンを接種した人は0.64の確率で免疫保持者になる。確率0.64はBernstein : J Infect Dis 197 (2008)の論文を参考にしている。
- ・ $T=8760/12=730[\text{step}](30 \text{ 日 } 10 \text{ 時間})$ とする。最初の2Tステップは年齢層①, ②だけがワクチンを接種し、ほかの年齢層はワクチンを接種できない。以後も同様に、ステップ数によってワクチンを接種できる年齢を限定する。(表2)
- ・一人がTステップで一回ワクチンを接種するとき、

$$k=T/730 \text{ とおくと } \delta = \frac{1}{\frac{365}{365} \cdot k} \cdot \frac{365}{10} \text{ だから、(表2)}$$

の接種期間(ステップ数)をもとに各年齢層の $\delta$ を(表1)<右端欄>のように設定する。

表1

年齢	現実社会での人数	シミュレーションでの人数	感染のしやすさ	$\beta^*$	$h$	$\gamma$	$\alpha$	$\delta$
① 0～5	6585	12	2.77	0.6925	1/3	1/5	1/10	6/10
② 6～12	8308	16	2.67	0.6675	(潜伏期間 3日間)	(発病期間 5日間)	(ウイルスの 変異期間 10日間)	6/5
③ 13～19	8681	16	2.76	0.69				6/5
④ 20～39	33823	64	1	0.25				6/5
⑤ 40～59	34439	65	0.56	0.14				3/20
⑥ 60～	35937	67	0.17	0.0425				

表2

ステップ数(時間)	1～1460	1461～2190	2191～2920	2921～8760
ワクチン接種(i)	①・②	③	④	⑤・⑥
ワクチン接種(ii)	①・②	③	④・⑤	⑥

## 結果

【ワクチンの接種優先順位】

(i) <①・②(2ヶ月)>→<③(1ヶ月)>→<⑥(1ヶ月)>  
→<④・⑤(8ヶ月)>

(ii) <①・②(2ヶ月)>→<③(1ヶ月)>→<④・⑤(1ヶ月)>  
→<⑥(8ヶ月)>

(iii) ワクチン接種なし

この3つのワクチン接種優先順位モデルのシミュレーションを10回し、平均人数と割合(%)を調べた。

		ワクチン接種の優先順位					
		①②-③-④-⑤		①②-③-④-⑤		ワクチンなし	
年齢層	状態	平均(人)	%	平均(人)	%	平均(人)	%
全体	S	118.44	49.35	131.20	54.66	122.87	51.20
	H	14.68	6.12	14.23	5.93	19.91	8.29
	I	25.00	10.42	24.34	10.14	32.92	13.72
	R	81.87	34.11	70.23	29.26	64.30	26.79
① 0～5	S	3.10	25.83	2.74	22.81	2.58	21.52
	H	1.12	9.36	0.97	8.07	1.52	12.69
	I	1.97	16.44	1.64	13.70	2.59	21.57
	R	5.81	48.38	6.55	55.42	5.31	44.22
② 6～12	S	4.32	26.99	3.72	23.24	3.47	21.70
	H	1.59	9.93	1.28	8.00	2.12	13.22
	I	2.73	17.09	2.22	13.90	3.60	22.47
	R	7.36	45.99	8.78	54.87	6.82	42.61
③ 13～19	S	4.20	26.26	4.91	30.67	3.52	22.01
	H	1.74	10.89	1.58	9.91	2.15	13.45
	I	2.98	18.63	2.94	18.36	3.39	21.21
	R	7.07	44.22	6.57	41.06	6.93	43.34
④ 20～39	S	26.15	40.85	28.84	45.06	25.94	40.54
	H	4.89	7.65	4.97	7.76	6.54	10.21
	I	8.33	13.01	8.08	12.62	10.74	16.78
	R	24.63	38.49	22.12	34.56	20.78	32.47
⑤ 40～59	S	32.43	49.88	35.01	53.87	34.74	53.44
	H	3.75	5.77	3.63	5.59	5.16	7.94
	I	6.22	9.56	6.47	9.96	8.53	13.13
	R	22.61	34.78	19.88	30.58	16.57	25.50
⑥ 60～	S	48.25	72.02	55.98	83.56	52.62	78.54
	H	1.59	2.37	1.80	2.68	2.42	3.61
	I	2.77	4.13	2.99	4.46	4.07	6.08
	R	14.39	21.48	6.23	9.30	7.89	11.78

(S: 感受性者 H: 保菌者 I: 発病者 R: 免疫保持者)

## 考察

・ワクチン接種なし(iii)よりもワクチン接種あり(i)(ii)の方が、6つの年齢層すべてで発病者(I)の人数は少なくなっている。したがってワクチンはインフルエンザの流行拡大予防策として有効だと考えられる。

・(i)(ii)ともに発病者(I)の人数の多い順に③→②→①→④→⑤→⑥となり、現状に近い結果を示している。

・(i)から(ii)へ変更した場合、発病者(I)の変化(%)の多い層は②、①の順である。また、①と②の免疫保持者(R)が大きく増加した。そして、保菌者(H)と発病者(I)の変化量の絶対値は、感受性者(S)と免疫保持者(R)の変化量の絶対値と比較して小さい。

・(i)から(ii)へ変更した場合、⑤と⑥の年齢層で発病者(I)が増加する。よって高年齢層がインフルエンザの合併症を起こすことを考慮すると、(i)の方が効果的だと考えられる。

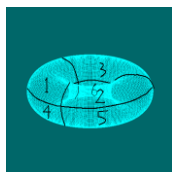
## 6.研究テーマ：『学級・学年閉鎖の効果の考察』

- <SHIRモデル>240 人を 40 人ずつ 1 組、2 組、・・・  
6 組のクラスに分け、学級閉鎖の効果や、効率的な  
学級閉鎖の方法を調べるモデルを作成した。

### <ルール>

- ・初期設定は、 $S$ <感受性者>を 230 人、 $H$ <保菌者>を  
10 人とし、 $H$ はランダムに置く。
- ・240 人を 6 クラス×40 人にわけ。
- ・下図のように空間を 6 区画に分け、上下・左右ループ  
させる。(トラス上にクラスを配置させる)

1 組	4 組
2 組	5 組
3 組	6 組



- ・各クラスの区画は横 10 マス、縦 7 マスの長方形に、40  
人をランダムに配置する。
- ・1 日 (24 時間) 経つと、各エージェントが元のクラス  
の固定位置に戻る。
- ・学年閉鎖は、0 人と 3~9 人で実施する。
- ・学年閉鎖は、0 人と 20 人から 5 人おきで 50 人まで実  
施する。
- ・パラメーター  $\beta^*=0.25$ 、 $h=1/3$ 、 $\gamma=1/5$  は今までと  
同様にする。
- ・免疫喪失率  $\alpha$  の定義は、学校の一学年を想定している  
ので  $\alpha=1/365$ (日)とする。
- ・“(失われた授業数)=各クラスの閉鎖期間(日)×5(一日当  
たりの授業コマ数)”と定義する

### 結果

次の i)~iii)の設定でシミュレーションを 30 回行った。

- 学年閉鎖に入る人数を 30 人に固定し、学級閉鎖に  
入る人数を 3 人~9 人と変える。(表 1)
- 学年閉鎖はなしにして、学級閉鎖に入る人数を 3 人  
~9 人と変える。(表 2)
- 学級閉鎖はなしにして、学年閉鎖に入る人数を 20  
~50 人で変える。(表 3)

表 1

学級閉鎖 (人)	学年閉鎖 (人)	終息までの 期間(日)	失われた 授業数(回)
3	30	38	460
4		46	496
5		49	426
6		49	408
7		49	400
8		51	389
9		54	395

表 2

学級閉鎖 (人)	学年閉鎖 (人)	終息までの 期間(日)	失われた 授業数(回)
3	0	41	461
4		44	440
5		51	429
6		48	364
7		52	328
8		48	293
9		48	243

表 3

学級閉鎖 (人)	学年閉鎖 (人)	終息までの 期間(日)	失われた 授業数(回)
0	0	40	0
	20	45	518
	25	42	413
	30	51	413
	35	51	345
	40	48	300
	45	47	285
	50	48	248

表 4<神戸高校における学級閉鎖・学年閉鎖期間>

日付	閉鎖学年 クラス	閉鎖期 間(日)	閉鎖 クラス数	サイクル (日)
5/16~31	全学年	16	25	130
10/5~11	1-1	7	1	
10/8~14	1-2~8 2-6	7	8	47
11/30~12/4	2 学年	5	8	52
1/25~29	2-7	5	1	

(サイクル：2 年生の経過日数)

### 考察

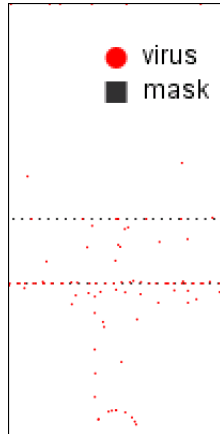
- ・(表 1)と(表 2)を比較すると学級閉鎖が 6~9 人の場合、  
ii)の方が i)より失われた授業数が少なくて済む。また、  
ウイルスが終息するまでの日数が(表 1)<(表 2)とは必  
ずしもなっておらず、学年閉鎖がウイルスの終息に効  
果的であるとは言い難い。
- ・学級閉鎖も学年閉鎖も実施しなかったとき終息するま  
での期間は 40 日となり、どの場合よりも最短になって  
いる。これは急に発病者( $I$ )が増え、一気に治っていく  
と考えられるが、現実ではこの経過は予防対策を講じ  
ていくので考えにくい。
- ・学級閉鎖に入る人数が多くなるほど (ただし 4 人以上  
の場合)、失われた授業数は減少していく。
- ・本校では 5 月中旬から 11 月中旬まで発病者 5 人で学級  
閉鎖に入っている。このとき、シミュレーション結果  
からは終息する日数が 49(日)を示しているが、表 4 よ  
りサイクルが 47~52(日)後に学級閉鎖が 2 度起きたこ  
とは関連があると思われる。このシミュレーションか  
ら予想すると、学級閉鎖は 50 日前後の周期で実施され  
ると考えられる。

## 7.研究テーマ：『マスクの効用の考察』

■マスクを通過するウイルスとマスクが止めるウイルスの割合が、マスクの繊維間の隙間の広さや配置を変化させていったときにどう変わるかをシミュレーションにより実験する。

<設定>

- ・赤色は飛沫(ウイルス)、灰色はマスクの繊維で、どちらも幅「1」。
- ・空間は  $100 \times 200$  で、シミュレーション上の長さ「1」は実際の  $5\mu\text{m}$  とする。
- ・下の辺の中央から計 100 個の飛沫が放出される。飛沫は直進し、マスクの繊維に触れるとその場に止まる。
- ・全ての飛沫がマスクを通過またはマスクに付着したときシミュレーションを終了する。
- ・実際のマスクは四層構造だが、口に接する層と一番外側の層は穴が目で見えるほど粗いため無視し、二層構造のモデルを考えた。

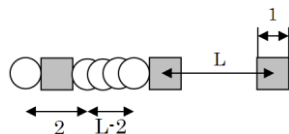


### シミュレーションの検証

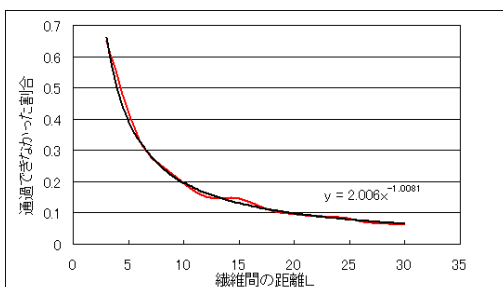
最初に一層構造のマスクを考える。

下図のようにマスクの繊維間の距離を  $L$  としたとき、飛沫がマスクの繊維の隙間を通過できない確率を  $P(L)$  とする。

$L > 2$  のとき、下図より(飛沫の通れない幅) : (飛沫の通れる幅) =  $2 : L - 2$  だから、 $P(L) = 2/L \cdots \textcircled{1}$  と仮説を立て、検証を試みる。



**結果**  $L$  を変動させてシミュレーションを行った結果が下のグラフで、近似曲線は  $y = 2.006x^{-1.0081}$  で①に近い式である。

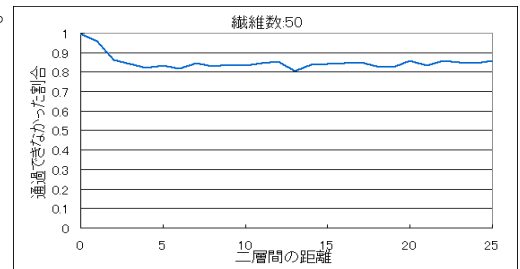


このことから仮説が検証され、シミュレーションの作成の成功を確認し、新たな実験を試みた。

### 実験 1：二層間の距離とマスクの性能

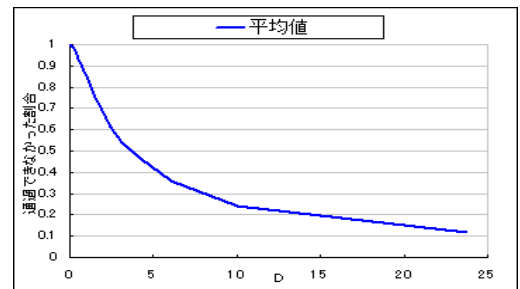
繊維数(二層分の合計)を  $n$  とする。 $n=50$  のとき横軸が「二層間の距離」、縦軸が「飛沫がマスクを通過できなかった割合」のグラフをかくと下のようになった。

**考察** 飛沫がマスクを通過できなかった割合は、二層間の距離が  $0 \sim 5$  と広がるにつれて低くなるが、 $5$  以上では変化がほとんどない。実際のマスクでは、二層間の距離を  $25\mu\text{m}$  よりも小さくできれば性能はよくなるが  $25\mu\text{m}$  以上の範囲で変化させても性能は変わらないといえる。



### 実験 2：繊維の間隔とマスクの性能

$n$  を  $5$  から  $100$  まで  $5$  間隔で変動させ、各々について二層間の距離が  $0 \sim 25$  のときの「通過できなかった割合」の平均値を求める。繊維数(二層分の合計)が  $n$  のとき、 $D$  を下図のように定めると  $D = (100 - n)/(n - 1)$  となることを利用して、横軸が  $D$ 、縦軸が通過できなかった割合の平均値であるグラフをかくと下のようになった。



**考察** グラフは単調減少で、 $D$  が大きいほど飛沫が通過できなかった割合が低くなる。また、グラフから

①繊維の幅： $5\mu\text{m}$ 、隙間の幅： $12\mu\text{m}$  以下の不織布等を2枚重ねると、 $D$  が約  $0.7(3.5\mu\text{m})$  以下になり飛沫を90%止めることができる。

②繊維の幅： $5\mu\text{m}$ 、隙間の幅： $17\mu\text{m}$  以下の不織布等を2枚重ねると、 $D$  が約  $1.2(6\mu\text{m})$  以下になり飛沫を80%止めることができる。

上の①,②のように、隙間の大きさからマスクの性能を予測することができる。

